

Открытый урок по геометрии в 9 классе.

Тема урока: «Геометрия пчелиных сот»

Учитель высшей категории Бовина Г.В.

Средняя школа при Посольстве России в Польше

Цели: приобретение учениками навыка исследования как универсального способа получения новых прочных знаний, развитие способности к исследовательскому типу мышления, активизация личностных позиций учащихся в образовательном процессе.

Задачи: доказать правило составления паркета из правильных многоугольников; выявить правильный многоугольник с наименьшим периметром.

Оборудование: модели правильных многоугольников: треугольников, квадратов, шестиугольников, пятиугольников - каждого типа по 6 штук (все многоугольники с одинаковой длиной стороны), раздаточный материал, презентация учителя.

Ход урока:

I. Организационный момент.

II. Актуализация знаний:

Мы продолжаем изучать правильные многоугольники. Вспомните, пожалуйста, основные определения и формулы:

- Какие многоугольники называются правильными?
- Чему равна сумма внутренних углов правильного многоугольника?
- Назовите формулы, связывающие сторону правильного многоугольника и радиусы вписанной и описанной окружностей.
- Чему равна сторона правильного треугольника, четырехугольника, шестиугольника?
- Как найти площадь правильного многоугольника?

Сегодня у нас урок-исследование. Однако, объект исследования зашифрован. Ключевые слова вы узнаете, решив задачи. Поставьте в соответствие «ответ – буква», составьте слово. Задания выполняйте по вариантам.

Вариант 1

1	Угол правильного n-угольника равен 144° . Сколько сторон имеет этот многоугольник?
2	Около правильного шестиугольника описана окружность радиуса 8. Чему равна сторона шестиугольника?
3	Найдите площадь правильного четырехугольника, если радиус его вписанной окружности равен 3.
4	Сторона правильного треугольника равна 6 см. Найдите радиус вписанной в него окружности.
5	Найдите величину центрального угла правильного пятиугольника?

Вариант 2

1	Сторона правильного треугольника равна 6 см. Найдите радиус описанной около него окружности.
2	Сколько сторон имеет правильный многоугольник, сумма углов которого равна 540° ?
3	Около правильного шестиугольника описана окружность радиуса 10. Чему равен периметр этого шестиугольника?
4	Найдите сторону правильного четырехугольника, если радиус описанной около него окружности равен $5\sqrt{2}$.

Ответы:

$2\sqrt{3}$	10	8	5	36	60	$\sqrt{3}$	72	10
С	П	Ч	О	Е	Т	Л	А	Ы

III. Определение темы урока и формулировка задач.

Пчела, соты, правильные многоугольники – ключевые слова этого урока. Пчёлы – удивительные творения природы. Геометрические способности пчёл проявляются при построении сот. Вы когда-нибудь видели пчелиные соты? Посмотрите на экран (презентация). Если разрезать пчелиные соты плоскостью, перпендикулярной их рёбрам, то будет видна сеть правильных шестиугольников, уложенных в виде паркета.

Возникает вопрос: «Почему пчёлы строят соты именно так, почему они предпочли сеть правильных шестиугольников?

Итак, запишем тему урока «Геометрия пчелиных сот».

Сформулируем задачи урока. (*Учитель задает вопросы, направляя учеников на самостоятельную формулировку задач урока*).

Чтобы разгадать математические секреты пчел, необходимо выяснить:

1. Какими правильными многоугольниками можно заполнить плоскость так, чтобы не было пропусков?
2. Почему пчелы предпочли правильный шестиугольник для строительства сот?

IV. Исследование, доказательство, выводы.

Задачу 1 разобьем на две части.

Часть 1(эксперимент). Учащиеся выполняют практическую работу, используя готовые модели правильных многоугольников, и готовят ответы на вопросы:

- Можно ли без пропусков покрыть плоскость правильными многоугольниками одного вида?
- Какие это могут быть многоугольники и сколько их надо уложить вокруг одной точки?

Какие выводы вы можете сделать? (*Ответы учащихся*)

Однако, можно предположить, что наш эксперимент не исключает другие варианты. Подтвердить или опровергнуть результаты эксперимента можно аналитически.

Часть 2 (доказательство): Предположим, что плоскость замощена правильными n - угольниками, причем каждая вершина является общей для x таких многоугольников.

Действительно, сумма внутренних углов выпуклого n -угольника равна $(n-2) \cdot 180^\circ$, где n -число сторон многоугольника. Сумма углов правильных n -угольников, сходящихся в одной вершине паркета, равна 360° . Тогда приравняв сумму внутренних углов к числу 360, мы получим следующее равенство: (x — число углов, сходящихся в одной вершине паркета)

$$\frac{180(n-2)x}{n} = 360^0$$
$$\frac{(n-2)x}{n} = 2$$
$$x(n-2) = 2n$$

$$x = \frac{2n}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}.$$

В каждой вершине сходится целое число углов. Разность $n-2$ должна быть кратна 4, поэтому может принимать лишь значения 1, 2 или 4; а значит, n может быть равно только 3, 4 или 6.

Если $n=3$, то $x=6$. $360^\circ:6=60^\circ$. Такой угол имеет правильный треугольник. Значит, в одной вершине могут сходиться 6 правильных треугольников.

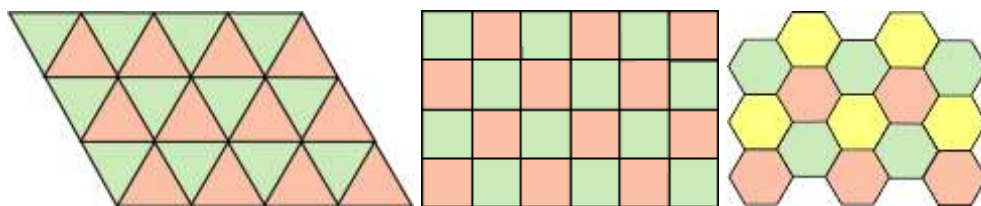
Если $n=4$, то $x=4$. $360^\circ:4=90^\circ$. Такой угол имеет правильный четырехугольник. Значит, в одной вершине могут сходиться 4 квадрата.

Если $n=6$, то $x=3$. $360^\circ:3=120^\circ$. Такой угол имеет правильный шестиугольник. Значит, в одной вершине могут сходиться 3 правильных шестиугольника.

Итак, мы выяснили, что заполнить плоскость без пропусков можно, используя или правильные треугольники, или квадраты, или правильные шестиугольники.

Заполнение плоскости многоугольниками, при котором любые два многоугольника либо имеют общую сторону, либо имеют общую вершину называется паркетом.

Паркет называется правильным, если он состоит из правильных многоугольников, и вокруг каждой вершины правильные многоугольники расположены одним и тем же способом.



Миллионы лет пчелы строят соты правильной шестиугольной формы (были найдены окаменелые останки пчелиных ульев возрастом в 100 миллионов лет). Почему пчелами была выбрана эта форма, а не треугольная, к примеру, или, скажем, квадратная, а именно шестиугольная?

Задача 2: Даны три равновеликие друг другу фигуры – правильный треугольник, квадрат, правильный шестиугольник. Какая из данных фигур имеет наименьший периметр?

Решение:

Пусть S – площадь каждой из данных фигур и $S=4 \text{ см}^2$.

a_3 , a_4 , a_6 — стороны соответствующих многоугольников.

Теперь нетрудно вычислить периметр каждой фигуры, зная её площадь.

Сначала выразим сторону каждого многоугольника через его площадь, затем найдем периметр этого многоугольника

1) Площадь правильного треугольника: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$$a^2\sqrt{3}=16; a^2 = \frac{16\sqrt{3}}{3} \approx 9,2376; a_3 \approx 3,03934; P_3 = 3a_3 = 9,11802 \text{ см.}$$

2) Площадь квадрата вычислим по формуле: $S = a^2$. $a_4 = 2$ см, а $P_4 = 8$ см.

3) Площадь правильного шестиугольника: $S = \frac{6a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

$$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = 4, 3a^2\sqrt{3}=8, a^2\sqrt{3}=\frac{8}{3}, a^2=\frac{8}{3\sqrt{3}}, a^2=\frac{8\sqrt{3}}{9} = 1,5396, a_6 = 1,24081,$$

тогда $P_6 = 6a_6 \approx 7,44486$ см.

Сравним, $P_6 < P_4 < P_3$.

Мы видим, что из трёх правильных многоугольников с одинаковой площадью наименьший периметр имеет правильный шестиугольник. Стало быть, выбрав правильный шестиугольник, мудрые пчёлы наиболее экономно используют площадь внутри небольшого улья и воск для изготовления ячеек.

Мы разгадали математические секреты пчел. Еще раз убедившись в том как точно сказал Галилео Галилей: «Книга природы написана на языке математики...». Математическими методами человек изучает природу и использует эти результаты в своей жизни.

Вопрос: «Как вы думаете почему телефонную связь называют «сотовой»?
Выступление ученика «Сотовая телефонная связь».

Итак, мобильные, или сотовые, телефоны работают, благодаря созданию особой сотовой сети. Сеть создана по принципу устройства пчелиных сот. Система сотовой связи представляет собой совокупность ячеек, покрывающих обслуживаемую территорию. Обычно ячейки схематично изображают в виде правильных шестиугольников, которые похожи на пчелиные соты, что и послужило поводом назвать данную систему сотовой. Архитекторы и инженеры не раз обращались к пчелиным постройкам и находили с их помощью лучшие технические решения.

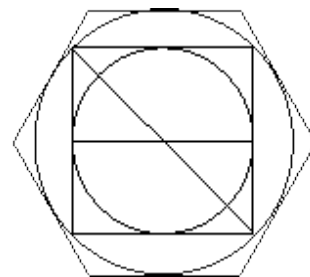
И как не согласиться с мнением пчелы из сказки «Тысяча и одна ночь»:
«Мой дом построен по законам самой строгой архитектуры. Сам Евклид мог бы поучиться, познавая геометрию моих сот».

V. Итог урока. Какие задачи мы сформулировали в начале урока?
(Ответы учащихся).

VI. Домашнее задание: п. 108, №1096, 1097, 1098 (решить любые две)

Дополнительно (к уроку):

Как по данному чертежу найти периметр квадрата, если известна сторона описанного шестиугольника?



Запишем цепочку:

$$a_6 \longrightarrow P_4$$

Надо вставить в нее пропущенные звенья.

– Чем связаны правильный шестиугольник и квадрат? (*Одной окружностью*)

– Какой является эта окружность для шестиугольника, а какова она для квадрата? (*Для 6-угольника – вписанная, для 4-угольника – описанная*)

$$a_6 \longrightarrow r_6 = R_4 \longrightarrow a_4 \longrightarrow P_4$$

Данную задачу можно решить в три действия:

$$1) \quad r_6 = \frac{a_6 \sqrt{3}}{2} = R_4;$$

$$2) \quad a_4 = R_4 \sqrt{2} = \frac{a_6 \sqrt{6}}{2};$$

$$3) \quad P_4 = 4a_4 = 2a_6 \sqrt{6}$$